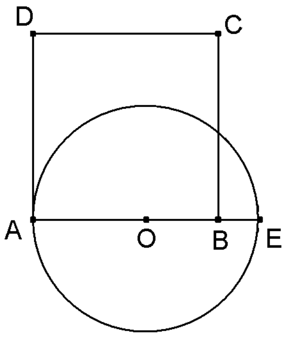
الإنشاءات الهندسية

الصغيري 2005

1. إنشاءات تاريخية

1.1 إنشاءات تقريبية

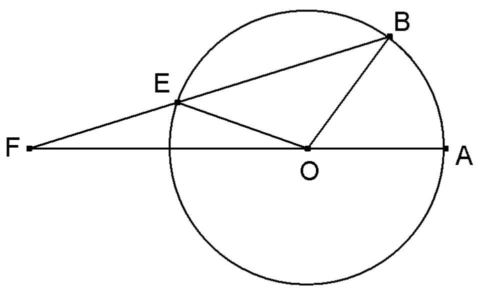
1.1.1 تربيع دائرة عند الفراعنة



الشكل1

استخدم المصريون عدة نتائج وعلاقات هندسية ،
ولإنشاء مربع له مساحة تقارب مساحة دائرة كان الكتبة *scribes*
يحددون ضلعه من خلال تقليص 1/9 من قطر الدائرة
إذا اعتبرنا أن $OA=1$ فإن مساحة المربع $ABCD$
هي $3.16 \simeq \dfrac{256}{81}$ وهي قيمة مقربة للعدد π

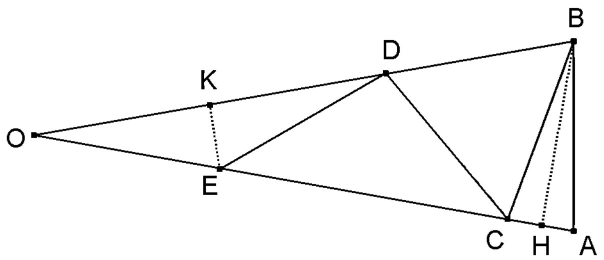
2.1.1 أرخميدس وتثليت زاوية



الشكل2

لتثليث الزاوية المركزية $\widehat{BOA}$ قام أرخميدس بإنشاء
النقطتين E وF بحيث E تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}(O,OA)$
وF تنتمي إلى نصف المستقيم [AO) و $EF=OA$
نفترض أننا أنشأنا النقطتين E وF
المثلثات OAB و OBE و EFO متساوية الساقين
إذن $\widehat{BOA}+\widehat{FOE}=2\widehat{BEO}$ ومنه $\widehat{BOA}+\widehat{FOE}=4\widehat{EFO}$
وبذلك $\widehat{BOA}=3\widehat{EFO}$

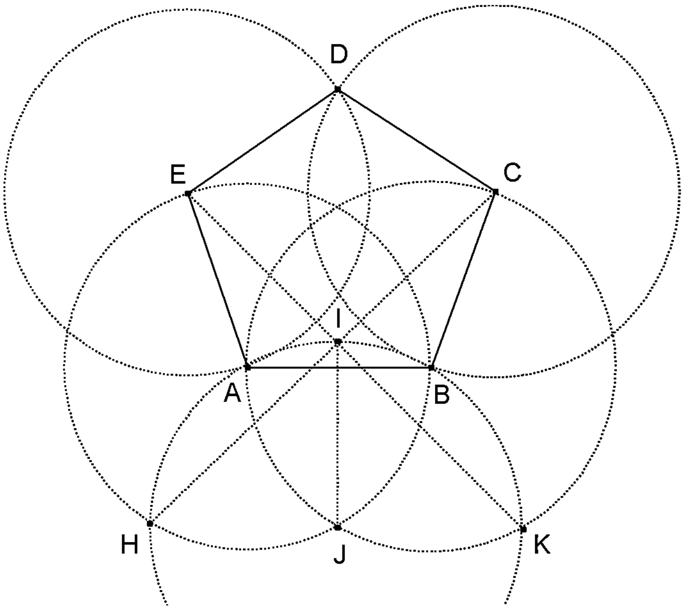
3.1.1 أبو الجود ومتاهات المضلع المنتظم



الشكل3

لتحديد طول ضلع في مضلع منتظم له 18 ضلعا
اعتمد عالم الرياضيات أبو الجود على الشكل3
وباستخدام استنتاجات هندسية خلص إلى صياغة
المعادلة $x^3+1=3x$ حيث $x=AB$ و $OA=OB=1$
المثلثان OBH و OEK متشابهان
إذن $\dfrac{OK}{OE}=\dfrac{OH}{OB}$ أي $OH=\dfrac{1-x}{2x}$
لأن OED مثلث متساوي الساقين في E
من جهة أخرى $OH=OA-\dfrac{AC}{2}$ و $AC=x^2$
(المثلثان OAB و BAC متشابهان) إذن $\dfrac{1-x}{2x}=1-\dfrac{x}{2}$
و بالتالي $x^3+1=3x$

4.1.1 ديرر *Dürer* وتصميم الخماسي المنتظم



الشكل4

*** الإنشاء** (الشكل4)
- J إحدى نقطة تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و$\mathscr{C}(B,AB)$
- I النقطة الثانية من تقاطع واسط القطعة $[AB]$ و الدائرة $\mathscr{C}(J,JA)$ بحيث I في نصف المستوى الذي تخمه (AB) ولايضم النقطة J
– C نقطة تقاطع (HI) و$\mathscr{C}(B,AB)$ و المنتمية لنصف المستوى الذي تخمه (AB) ويضم النقطة I
– E نقطة تقاطع (KI) و$\mathscr{C}(A,AB)$ المنتمية لنصف المستوى الذي تخمه (AB) ويضم النقطة I

*** لنبين أن إنشاء " ديرر" تقريبي**

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم الذي أصله منتصف القطعة $[AB]$ ومحور أفاصيله (AB) بحيث $B(1,0)$

إذن $A(-1,0)$ و $J\left(0,-\sqrt{3}\right)$ و $I\left(0,2-\sqrt{3}\right)$ و $H\left(-2,-\sqrt{3}\right)$

ليكن (a,b) زوج إحداثيتي النقطة C إذن $b=a+2-\sqrt{3}$ لأن النقط C و H و I مستقيمية

وبما أن $BC=2$ فإن $a^2-2a+b^2-3=0$ ومنه $a^2+\left(1-\sqrt{3}\right)a+2\left(1-\sqrt{3}\right)=0 \quad (1)$

من جهة أخرى $AB^2=4$ و $AC^2=(a+1)^2+\left(a+2-\sqrt{3}\right)^2$ وحسب المتساوية (1) نجد $AC^2=4(a+1)$ ومنه

$\dfrac{AC^2}{AB^2}=a+1$ وبذلك يكفي إثبات أن $\Phi^2\neq a+1$ حيث $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ هو العدد الذهبي

إذا كان $\Phi^2=a+1$ فإن $a=\Phi$ إذن Φ ينبغي أن يحقق العلاقة (1)

لكن $\Phi^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\Phi+2\left(1-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\left(8+2\sqrt{5}\right)-\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)\right)=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{8+2\sqrt{5}+5\sqrt{3}+\sqrt{15}}$

وبما أن $-3+\sqrt{5}<0$ فإن Φ لا يحقق العلاقة (1) وبذلك نستنتج أن إنشاء" ديرر" غير دقيق .

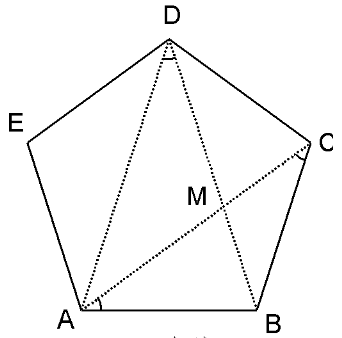
*** ملاحظة**

كل خماسي منتظم $ABCDE$ يحقق $\dfrac{AC}{AB}=\Phi$ حيث $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ هو العدد الذهبي

المثلثان DAB و ABM متشابهان (لهما زاويتان متقايستان)

إذن $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AM}{AB}$ وبما أن $AM=AD-AB$ فإن $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{AD-AB}$

ومنه $\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2-\dfrac{AD}{AB}-1=0$ وبذلك $\dfrac{AC}{AB}=\Phi$



الشكل5

2.1 إنشاءات " دقيقة"

1.2 .1 بطولميوس والمعدلات

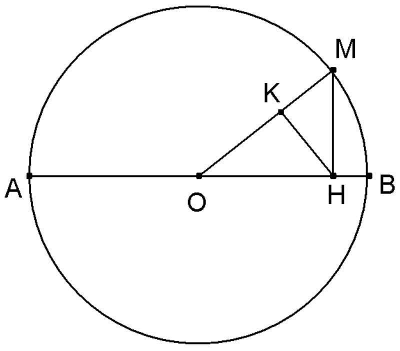
يقدم بطولميوس في الجزء الثالث من كتابه "المجموعة" الشكل جانبه ويجسد فيه المعدلات الأساسية لمقدارين a و b : المعدل الحسابي والهندسي و التوفيقي.

$$OM=\frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad HM=\sqrt{ab} \quad \text{و} \quad KM=\frac{2ab}{a+b}$$

يمكن استنتاج العلاقة الأخيرة من خلال كتابة جيب تمام الزاوية $\widehat{OMH}$ في المثلثين OHM و HKM ، وكما يمكن استنتاجها من خلال تشابه المثلثين OHM و HKM

***ملاحظة**

- بين كيف يمكن إنشاء المعدل التربيعي للعددين a و b



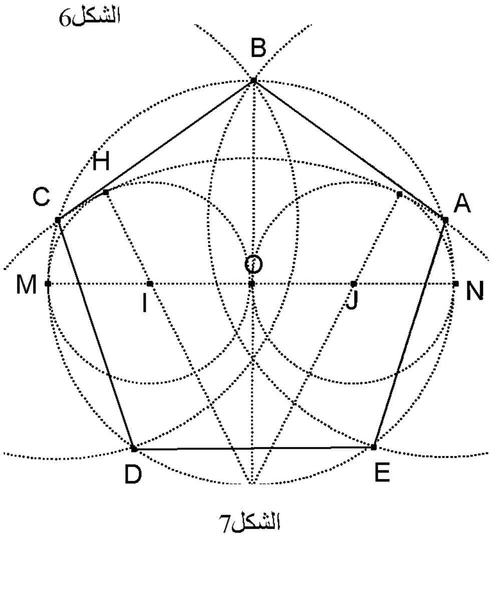
الشكل6

2.2.1 الخماسي المنتظم بالعين الفرعونية

*** الإنشاء** (الشكل7)

- دائرة $\mathscr{C}(O,r)$ و $[MN]$ أحد أقطارها
- الدائرتين $\mathscr{C}(I,r/2)$ و $\mathscr{C}(J,r/2)$ حيث I و J هما على التوالي منتصفا $[OM]$ و $[ON]$
- B و K نقطتي تقاطع واسط $[MN]$ و $\mathscr{C}(O,r)$
- الدائرة $\mathscr{C}(K,KH)$ حيث H هي إحدى نقطتي تقاطع المستقيم (KI) والدائرة $\mathscr{C}(I,r/2)$
- A و C نقطتي تقاطع $\mathscr{C}(K,KH)$ و $\mathscr{C}(O,r)$
- D النقطة الثانية من تقاطع $\mathscr{C}(C,CB)$ و $\mathscr{C}(O,r)$
- E النقطة الثانية من تقاطع $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(O,r)$

وبذلك نحصل على الخماسي المنتظم $ABCD$



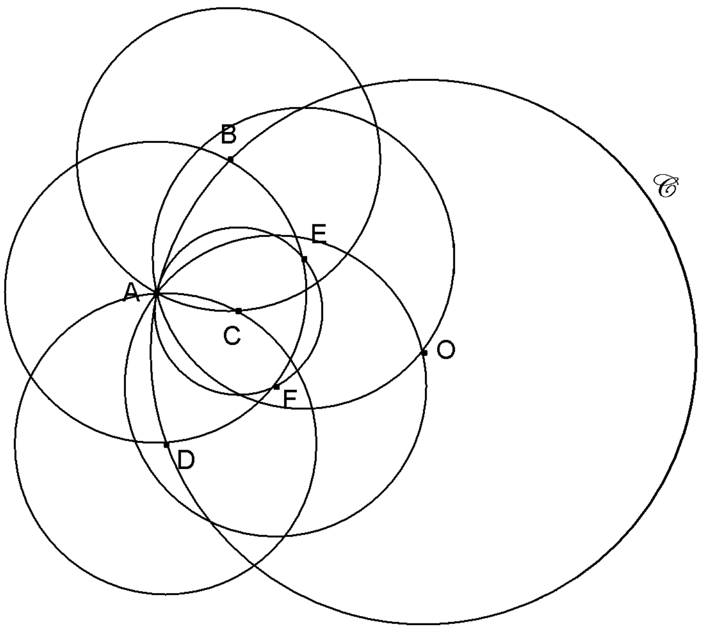
الشكل7

*** البرهان**

$AK = \frac{r}{2}+\sqrt{r^2+\frac{r^2}{4}}$ إذن $AK = \Phi r$ وبما أن $\cos\widehat{AKB} = \frac{KA}{KB}$ فإن $\cos\widehat{AKB} = \frac{\Phi}{2}$

ومنه $\widehat{AKB} = \frac{\pi}{5}$ إذن $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$ وبالتالي يكون الخماسي $ABCDE$ منتظما

3.2.1 مغامرة نابوليون في البحث عن مركز دائرة



الشكل8

$\mathscr{C}$ دائرة مركزها غير منشئ
المطلوب هو إنشاء هذا المركز باستخدام البركار فقط

*** الإنشاء** (الشكل8)
نعتبر نقطة A من الدائرة $\mathscr{C}$
ننشئ B و D نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}(A,r)$
حيث الشعاع r أصغر قطعا من قطر الدائرة $\mathscr{C}$
وننشئ C النقطة الثانية من تقاطع $\mathscr{C}(B,r)$ و $\mathscr{C}(D,r)$
ثم ننشئ E و F نقطتي تقاطع $\mathscr{C}(A,r)$ و $\mathscr{C}(C,AC)$
وأخيرا ننشئ O النقطة الثانية من تقاطع الدائرتين
$\mathscr{C}(E,r)$ و $\mathscr{C}(F,r)$ وبذلك O هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$

*** البرهان**
ليكن R شعاع الدائرة $\mathscr{C}$ و A' النقطة المتقابلة قطريا مع A في $\mathscr{C}$
وليكن M و N على التوالي منتصفا $[AC]$ و $[AO]$
المثلثان ADA' و AMB متشابهان لأنهما قائما الزاوية
و $\widehat{ABM} = \widehat{AA'D}$ (زاويتان تحصران نفس القوس)

إذن $\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AA'}$ أي $\frac{AC}{2r} = \frac{r}{2R}$ ومنه $AC = \frac{r^2}{R}$

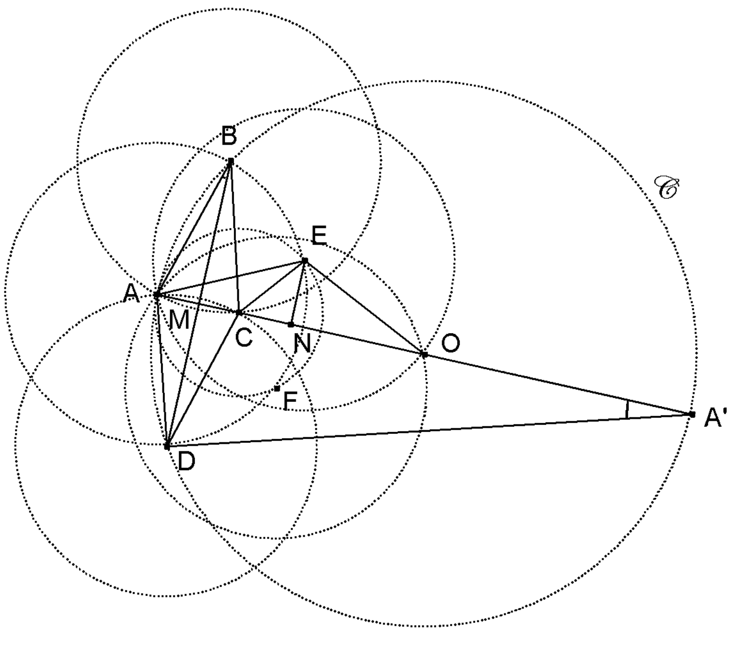
المثلثان ACE و AEO متشابهان لأنهما متساويا الساقين
ولهما زاوية مشتركة (النقط A و N و O مستقيمية
لأنها تنتمي لواسط القطعة $[EF]$)

إذن $\frac{AE}{AO} = \frac{AC}{AE}$ ومنه $AO = \frac{r^2}{AC} = R$

من جهة أخرى حسب مبرهنة فيتاغورس

$$
\begin{aligned}
OB^2 &= OM^2 + MB^2 \\
&= \left(R - \frac{AC}{2}\right)^2 + r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 \\
&= R^2
\end{aligned}
$$

إذن $OB = R$ و بالمثل نبين أن $OD = R$
ومنه O تنتمي إلى واسط $[AB]$ وإلى واسط $[AD]$
و نستنتج ان O هو مركز الدائرة $\mathscr{C}$



الشكل9

*** ملاحظة**
- مسألة إنشاء مركز دائرة باستخدام البركار فقط تعرف غالبا بمسالة " نابوليون " *Problème de Napoléon*
لكنها في حقيقة الأمر إبداع لعالم الرياضيات الإيطالي" ماشيروني"(1750-1800) *Lorenzo Mascheroni*
- أنظر طريقة إنشاء أخرى في الفقرة 5.1.2

2 تطبيقات حول الإنشاءات الهندسية

1.2 إنشاءات هندسية باستخدام البركار فقط

1.1.2 إنشاء مماثلة نقطة بالنسبة لنقطة

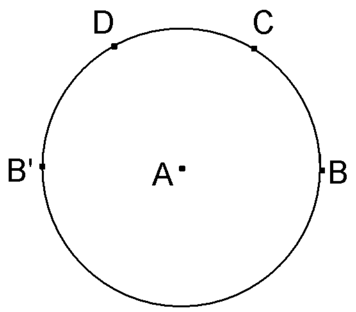
A و B نقطتان مختلفتان في المستوى

المطلوب هو إنشاء B' مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة A

*** الإنشاء** (الشكل10)

ننشئ الدائرة $\mathscr{C}(A,AB)$ ثم ننشئ عليها نقط C و D و B' **في هذا الترتيب**

بحيث $AB = BC = CD = DB'$ ومنه B' هي مماثلة B بالنسبة للنقطة A



الشكل10

*** البرهان**

- طريقة1

لدينا $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB'} = 60^\circ$ وبما أن $\widehat{BAB'} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB'}$

فإن $\widehat{BAB'} = 180^\circ$ إذن A و B و B' نقط مستقيمية من جهة أخرى $AB = AB'$ لأن B' تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}(A,AB)$

وبالتالي B' هي مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة A

- طريقة2

$ABCD$ و $ACDB'$ معينان إذن $AB = AB'$ و A و B و B' نقط مستقيمية لأن $(AB)//(CD)$ و $(AB')//(CD)$

*** تمرين**

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى

باستخدام البركار فقط ، بين كيفية إنشاء النقطة C بحيث $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

2.1.2 إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم محدد بنقطتين

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى

المطلوب هو إنشاء نقطتين C و C' بحيث يكون (CC') عمودي على (AB)

*** الإنشاء** (الشكل11)

ننشئ دائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ متمركزتان في A و B على التوالي

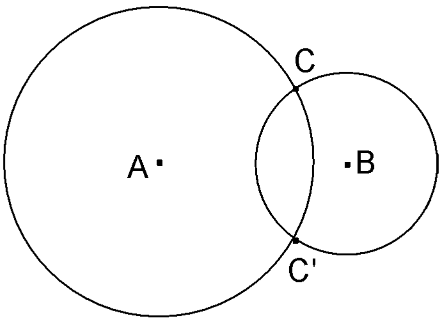
ومتقاطعتان في C و C'

(CC') هو مستقيم عمودي على المستقيم (AB)

*** البرهان**

C و C' تنتميان إلى $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ إذن $BC = BC'$ و $AC = AC'$

ومنه (AB) واسط القطعة $[CC']$ وبذلك (CC') هو مستقيم عمودي على (AB)



الشكل11

*** تمرين**

O و A و B ثلاث نقط غير مستقيمية

باستخدام البركار فقط ، بين كيفية إنشاء نقطتي تقاطع المستفيم (AB) ودائرة مركزها O

3.1.2 إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم محدد بنقطتين ومار من إحدى هاتين النقطتين

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى

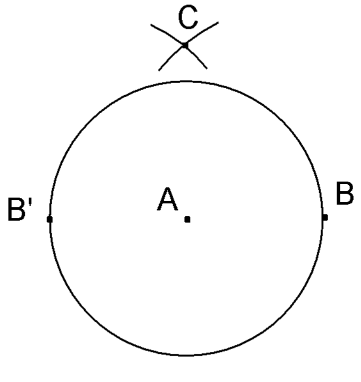
المطلوب هو إنشاء نقطة C بحيث يكون (AC) أو (BC) عموديا على (AB)

***الإنشاء1** (الشكل12)

ننشئ B' مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة A

ثم ننشئ النقطة C إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(B,r)$ و $\mathscr{C}(B',r)$ حيث $r > AB$

وبذلك يكون (AC) عموديا على (AB)



الشكل12

*** البرهان**

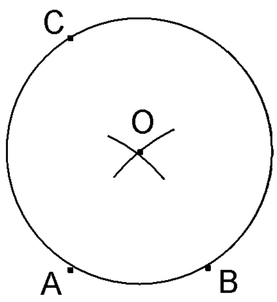
لدينا $BC = B'C$ إذن C تنتمي إلى واسط القطعة $[BB']$

وبما أن A منتصف القطعة $[BB']$ فإن (AC) عمودي على (AB)

* **الإنشاء2** (الشكل13)
ننشئ الدائرة $\mathscr{C}(O,AB)$ حيث O هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(B,AB)$
ثم ننشئ C مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة A
وبذلك يكون (AC) عموديا على (AB)

* **البرهان**

بما أن النقط A و B و C متداورة (تنتمي لنفس الدائرة)
بحيث B و C متماثلة قطريا فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A
ومنه يكون (AC) عموديا على (AB)

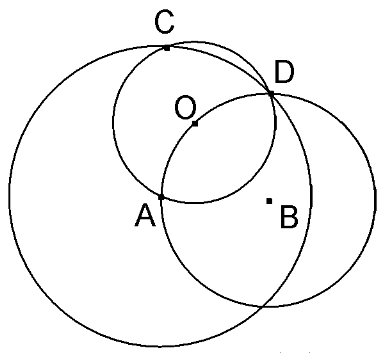


الشكل13

* **الإنشاء3** (الشكل14)
ننشئ الدائرة $\mathscr{C}(B,AB)$ ونعتبر نقطة O منها ثم ننشئ الدائرة $\mathscr{C}(O,OA)$
التي تقطع الدائرة الأولى في نقطة ثانية D
الدائرة $\mathscr{C}(A,AD)$ تقطع الدائرة $\mathscr{C}(O,OA)$ في نقطة ثانية C
وبذلك يكون (AC) عموديا على (AB)

***البرهان**

لدينا $OC = OD$ و $AC = AD$ إذن (OA) واسط $[CD]$
ومنه $\widehat{DCA} + \widehat{CAD} = 90^0$
من جهة أخرى $\widehat{DCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{DOB} + \widehat{OAB}\right)$
وبما أن $\widehat{DOB} = \widehat{OAB}$ لأن $BOA \equiv BDO$ فإن $\widehat{DCA} = \widehat{OAB}$
إذن $\widehat{OAB} + \widehat{CAO} = 90^0$ وبذلك يكون (AC) عموديا على (AB)

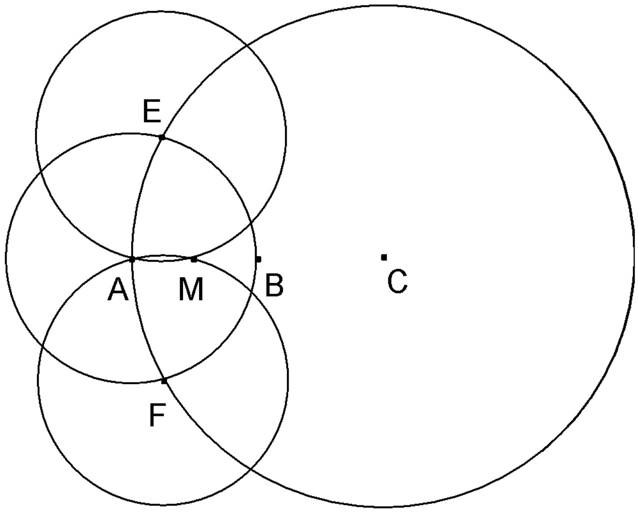


الشكل14

4.1.2 إنشاء منتصف قطعة

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى
المطلوب هو إنشاء منتصف القطعة $[AB]$

* **الإنشاء1** (الشكل15)
ننشئ C مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B
وننشئ E و F نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(C,AC)$
ثم ننشئ M النقطة الثانية في تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(E,AB)$ و $\mathscr{C}(F,AB)$
وبذلك تكون M هي منتصف القطعة $[AB]$

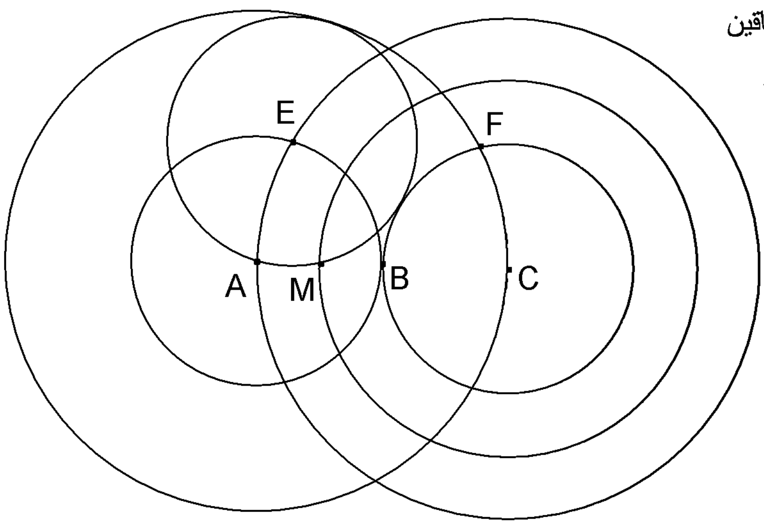


الشكل15

* **البرهان**

لدينا $AE = AF$ و $CE = CF$ إذن (AC) هو واسط القطعة $[EF]$ (1)
وبما أن $AEMF$ معين لأن $AE = AF = EM = FM$ فإن (AM) هو واسط القطعة $[EF]$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن $M \in (AC)$ ومنه $M \in (AB)$
من جهة ثانية EAM و CEA متشابهان لأنهما متساويا الساقين
ولهما زاوية مشتركة إذن $\dfrac{EM}{AM} = \dfrac{CA}{EA}$ ومنه $\dfrac{AB}{AM} = 2$
وبالتالي M منتصف القطعة $[AB]$

* **الإنشاء2** (الشكل16)
ننشئ C مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B وننشئ النقطتين E و F في نفس نصف المستوى الذي تخمه (AB) بحيث E و F هما على التوالي النقطة الثانية من تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(C,AC)$
ومن تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(C,AB)$ و $\mathscr{C}(A,AC)$
ثم ننشئ النقطة M بحيث يكون $EFCM$ متوازي أضلاع وبذلك تكون M هي منتصف القطعة $[AB]$



الشكل16

*** البرهان**

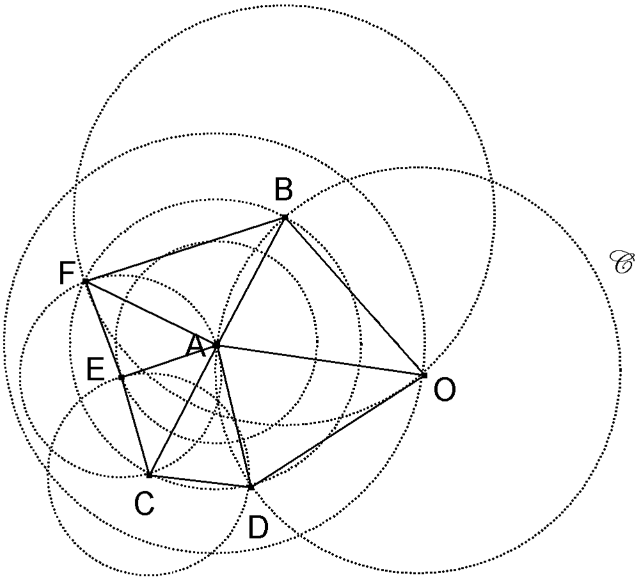
لدينا $M \in (AB)$ لأن $EFCM$ متوازي الأضلاع من جهة ثانية **المثلثان** EAM و CEA متشابهان لأنهما متساويا الساقين ولهما زاوية مشتركة إذن $\frac{EM}{AM} = \frac{CA}{EA}$ ومنه $2 = \frac{AB}{AM}$

وبالتالي M منتصف القطعة $[AB]$

5.1.2 إنشاء مركز دائرة

$\mathscr{C}$ دائرة مركزها غير منشئ

المطلوب هو إنشاء هذا المركز



الشكل17

*** الإنشاء** (الشكل17)

نعتبر نقطة A من الدائرة $\mathscr{C}$

ننشئ :

B و D نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}(A,r)$

النقطة C المتقابلة قطريا مع B في $\mathscr{C}$

E إحدى نقطة تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,CD)$ و $\mathscr{C}(C,CD)$

F النقطة الثانية من تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(E,CD)$

ثم ننشئ داخل الدائرة $\mathscr{C}$ النقطة O نقطة تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(B,BF)$ و $\mathscr{C}(A,BF)$

وبذلك تكون O مركز الدائرة $\mathscr{C}$

*** البرهان**

لدينا $EAF \equiv ECA$ إذن $\widehat{EAF} = \widehat{ECA}$ وبما أن $\widehat{BAE} = \widehat{BAF} + \widehat{EAF}$ و $\widehat{BAE} = \widehat{AEC} + \widehat{ECA}$

فإن $\widehat{BAF} = \widehat{AEC}$ إذن المثلثان ABF و ECA متشابهان إذن $\frac{FB}{AB} = \frac{CA}{CE}$ أي $\frac{OB}{AB} = \frac{CA}{CD}$

و بما أن المثلثين OBA و ACD متساويا الساقين نستنتج أنهما متشابهان إذن $\widehat{BAO} = \widehat{ACD}$

من جهة أخرى $\widehat{BAD} = 2\widehat{ACD}$ إذن $\widehat{BAO} = \widehat{OAD}$ وبذلك $OBA \equiv OAD$ ومنه $OA = OB = OD$

وبالتالي O هو مركز الدائرة $\mathscr{C}$

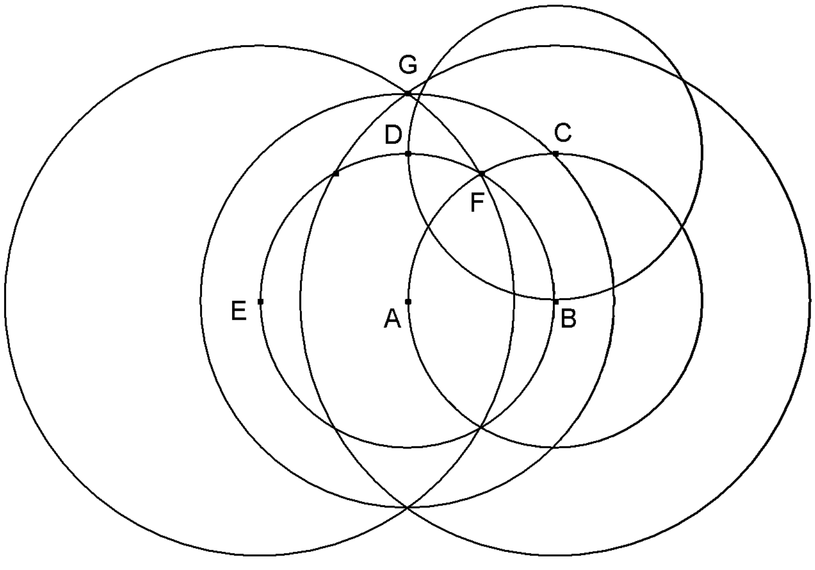
6.1.2 إنشاء مربع انطلاقا من رأسين معلومين

A و B نقطتان مختلفتان في المستوى

المطلوب هو إنشاء مربع بحيث يكون A و B راسين له

- **الحالة1**: A و B رأسان متتابعان

*** الإنشاء** (الشكل18)



الشكل18

ننشئ الدائرة $\mathscr{C}(A,AB)$ ونعين عليها نقطتين E و F بحيث $BE = 2AB$ و $BF = AB$

وننشئ G إحدى نقطتي تقاطع $\mathscr{C}(B,EF)$ و $\mathscr{C}(E,EF)$

وننشئ في نصف المستوى الذي يضم G و تخمه (AB)

النقطة C نقطة تقاطع $\mathscr{C}(B,AB)$ و $\mathscr{C}(A,AG)$

وأخيرا ننشئ D النقطة الثانية من تقاطع الدائرتين $\mathscr{C}(A,AB)$ و $\mathscr{C}(C,AB)$

وبذلك نحصل على المربع $ABCD$

*** البرهان**

حسب مبرهنة فيتاغورس : $EF = AB\sqrt{3}$ و $AG = AB\sqrt{2}$

إذن $AC = AB\sqrt{2}$ لأن $C \in \mathscr{C}(A, AG)$ ومنه ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B.

- **الحالة2**: A و B رأسان غير متتابعين

*** الإنشاء**

ننشئ M منتصف القطعة $[AB]$

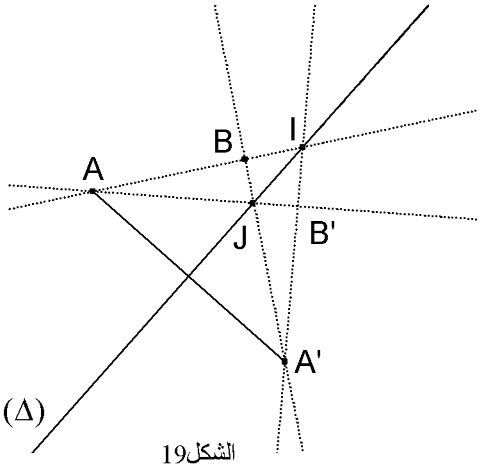
وباستخدام الحالة1 السابقة ننشئ النقطة C بحيث يكون المثلث AMC متساوي الساقين وقائم الزاوية في M ثم ننشئ D مماثلة النقطة C بالنسبة للنقطة M

*** البرهان**

يستنتج من الفقرة ومن الحالة1 السابقة.

2.2 إنشاءات هندسية باستخدام فقط مسطرة غير مدرجة

1.2.2 إنشاء مماثلة نقطة بالنسبة لواسط قطعة



الشكل19

نعتبر (Δ) واسط قطعة $[AA']$ ونقطة B خارجه

بحيث (AB) يقطع (Δ) في نقطة I

المطلوب هو إنشاء B' مماثلة B بالنسبة للمستقيم (Δ)

*** الإنشاء** (الشكل19)

ننشئ المستقيم (IA') و المستقيم (BA') ثم المستقيم (AJ)

حيث J هي نقطة تقاطع (BA') و (Δ)

وبذلك نحصل على النقطة B' نقطة تقاطع (AJ) و(IA')

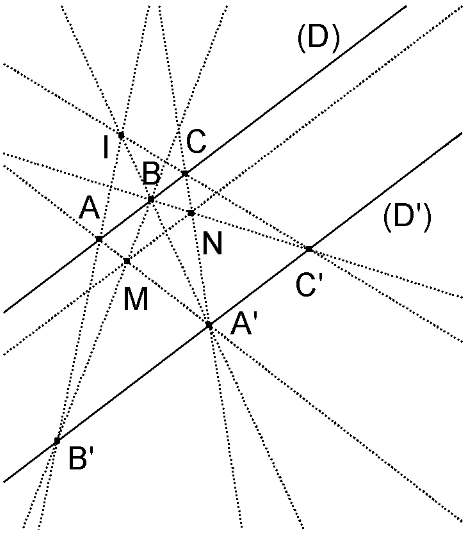
*** البرهان**

نعتبر s التماثل المحوري الذي محوره (Δ)

إذن $(IA)\xrightarrow{s}(IA')$ و $(A'J)\xrightarrow{s}(AJ)$

ومنه $s(B)=B'$ لأن B و B' هما على التوالي نقطتا تقاطع المستقيمين $(A'J)$ و(IA) والمستقيمين (AJ) و(IA')

2.2.2 إنشاء مستقيم مار من نقطة معلومة ومواز لمستقيمين متوازيين



الشكل20

(D) و (D') مستقيمان متوازيان و M نقطة خارجهما

المطلوب هو إنشاء المستقيم المار من M والموازي للمستقيمين (D) و (D')

- **الحالة1**

النقطة M داخل الشريط المحدد بالمستقيمين (D) و (D')

*** الإنشاء** (الشكل20)

نعتبر ثلاثة نقط A و B و C من (D)

وننشئ المستقيمين (AM) و(BM') ثم المستقيمين(AB') و(BA')

حيث A' و B' هما على التوالي نقطتا تقاطع المستقيمين (AM) و(D')

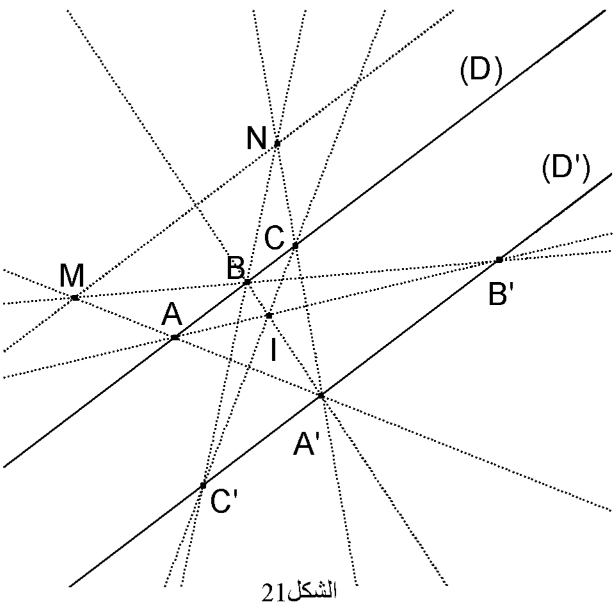
و المستقيمين (BM) و(D')

وننشئ المستقيم (IC) حيث I هي نقطة تقاطع المستقيمين(AB') و(BA')

وننشئ المستقيمين (CA') و(BC') لنحصل على N نقطة تقاطعهما

وبذلك يكون (MN) هو المستقيم المطلوب

*** البرهان**



الشكل21

نعتبر المثلثين IBB' و IBC' ونستخدم مبرهنة مينلوس $Menelaus$

إذن $\frac{\overline{A'I}}{\overline{A'B}}\times\frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}}\times\frac{\overline{AB'}}{\overline{AI}}=\frac{\overline{CC'}}{\overline{CI}}\times\frac{\overline{A'I}}{\overline{A'B}}\times\frac{\overline{NB}}{\overline{NC'}}=-1$

وبما أن $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AI}}=\frac{\overline{C'C}}{\overline{CI}}$ حسب مبرهنة طاليس فإن $\frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{NC'}}$

وحسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن (MN) و$(B'C')$ منوازيان

- **الحالة2**

النقطة M خارج الشريط المحدد بالمستقيمين (D) و (D')

*** الإنشاء** (الشكل21)

طريقة مماثلة للطريقة المعتمدة في الحالة1

*** البرهان**

نفس البرهان الوارد في الحالة1

*** ملحوظة**

إذا كان المستقيمان (AB') و (BA') متوازيان في الحالة1 يكفي استخدام الحالة2 على اعتبار أن C نقطة خارج الشريط المحدد بالمستقيمين (AB') و (BA') والنقطتان M و N هما على التوالي مركز متوازي الأضلاع $ABA'B'$ و مركز متوازي الأضلاع $BCC'A'$

*** تطبيق**

$ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه O و M نقطة خارجه

بين كيفية إنشاء النقطة M' مماثلة M بالنسبة للنقطة O

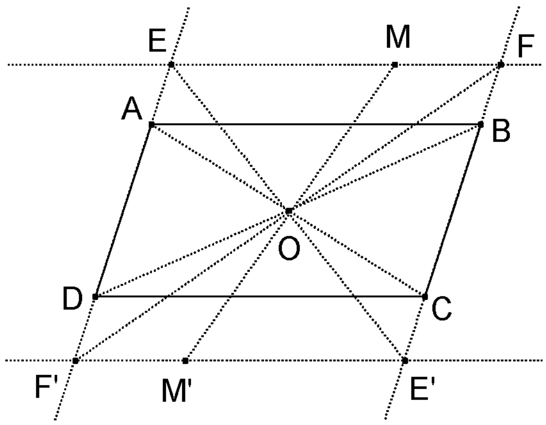
*** الإنشاء** (الشكل22)

ننشئ الموازي للمستقيم (AB) والمار من M

وهذا الموازي يقطع (AD) و (BC) في E و F على التوالي

E' و F' مماثلتي E و F بالنسبة للنقطة O هما على التوالي تقاطع المستقيمين ((BC) و (EO) والمستقيمين (AD) و (FO)

النقطة M' مماثلة M بالنسبة للنقطة O هي نقطة تقاطع المستقيمين (OM) و $(E'F')$



الشكل22

*** البرهان**

يعتمد أساسا على ما سبق عرضه في الفقرة **2.2.2**

*** تمرين1**

ABC مثلث و I منتصف $[BC]$ و E نقطة من $[AI]$

(CE) و (BE) يقطعان $[AB]$ و $[AC]$ في M و N على التوالي

1) بين أن (BC) و (MN) متوازيان

2) استنتج طريقة لإنشاء مستقيم مواز لمستقيمين معلومين ومتوازيين باستخدام المسطرة فقط

*** تمرين2**

$ABCD$ مربع

E و F نقطتان من $[AB]$ و $[BC]$ على التوالي بحيث $AE = BF$

باستخدام فقط مسطرة غير مدرجة بين كيفية إنشاء المستقيم المار من D والعمودي على المستقيم (EF)

المراجع

- Bouvier.A et AL (1986) *Didactique des mathématiques* , Le Dire et Le Faire, Cedic\Nathan
- Carrega.J.C (1989) *Théorie des corps. La règle et le compas*, Hermann